

ΘΕΜΑ Α

A1. Σχολικό σελ. 93

A2. Σχολικό σελ 16

A3.

α. Λ

β. Σ

γ. Σ

δ. Σ

ε. Λ

A4. α) ο

β) 2x

ΘΕΜΑ Β

B1) Έχουμε $v_1 + v_2 + v_3 + v_4 + v_5 = v \Rightarrow v_1 + 40 = 50 \Rightarrow v_1 = 10$.

Από την σχέση $f_i \% = \frac{v_i}{v} 100$ έχουμε

$$f_1 \% = \frac{10}{50} 100 = 20\%$$

$$f_2 \% = \frac{15}{50} 100 = 30\%$$

$$f_3 \% = \frac{11}{50} 100 = 22\%$$

$$f_4 \% = \frac{8}{50} 100 = 16\%$$

$$f_5 \% = \frac{6}{50} 100 = 12\%$$

Επιπλέον για τις αθροιστικές συχνότητες ισχύει:

$$N_1 = v_1 = 10$$

$$N_2 = v_1 + v_2 = 25$$

$$N_3 = v_3 + N_2 = 36$$

$$N_4 = v_4 + N_3 = 44$$

x_i	n_i	$f_i\%$	N_i
0	10	20	10
1	15	30	25
2	11	22	36
3	8	16	44
4	6	12	50
ΣΥΝΟΛΟ	50	100	

B2) $\bar{X} = \sum_{i=1}^5 x_i f_i = 0 + 0,3 + 0,44 + 0,48 + 0,48 = 1,7$ ώρες.

B3) $n = 50$ άρτιος άρα η διάμεσος δ ισούται με το ημιάρθροισμα των δύο μεσέων παρατηρήσεων. Έστω οι παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά $t_1, t_2, \dots, t_{50}$

$$\delta = \frac{t_{25} + t_{26}}{2} = \frac{1 + 2}{2} = \frac{3}{2} = 1,5$$

B4) α) Το ζητούμενο ποσοστό είναι το $f_1\% + f_2\% + f_3\% + f_4\% = 100 - f_5\% = 88\%$

β) $\bar{y} = \bar{x} + c$

$$\bar{y} = 1,7 + 4 = 5,7$$

$$\bar{y} = 5,7$$

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Η f είναι παραγωγίσιμη και συνεχής ως πολυωνυμική για κάθε πραγματικό αριθμό x .

$$f'(x) = -6x^2 + 12x, x \in \mathbb{R}$$

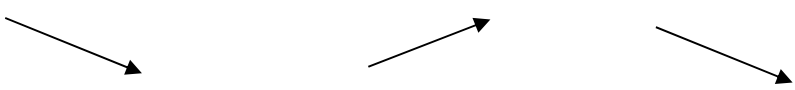
$$f'(x) = 0$$

$$-6x^2 + 12x = 0 \Rightarrow$$

$$-6x \cdot (x - 2) = 0$$

$$x = 0 \text{ ή } x = 2$$

Ακολουθεί ο πίνακας μονοτονίας:

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$
$f'(x)$	-	○ +	○	-
$F(x)$				

Η f είναι γνησίως φθίνουσα στα διαστήματα $(-\infty, 0]$ και $[2, +\infty)$

Η f είναι γνησίως αύξουσα στο διάστημα $[0, 2]$

Γ2. Η παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = 0$ το $f(0) = \alpha$ και τοπικό μέγιστο στο $x = 2$ το $f(2) = 8 + \alpha$.

Έχουμε ότι:

$$\frac{f(0)+f(2)}{2} = -8 \Rightarrow$$

$$\frac{\alpha+8+\alpha}{2} = -8 \Rightarrow$$

$$2\alpha + 8 = -16 \Rightarrow$$

$$2\alpha = -24 \Rightarrow$$

$$\alpha = -12$$

Γ3. Η εξίσωση της εφαπτομένης της C_f στο σημείο $M(1, f(1)) = (1, -8)$ είναι της μορφής $y = \lambda x + \beta$.

Έχουμε ότι $\lambda = f'(1) = 6$. Άρα: $y = 6x + \beta$.

Επειδή το σημείο ανήκει στην ευθεία της εφαπτομένης τότε θα επαληθεύει την εξίσωσή της οπότε θα ισχύει:

$$-8 = 6 \cdot 1 + \beta \Rightarrow$$

$$\beta = -14$$

Άρα η εξίσωση της εφαπτομένης θα είναι:

$$y = 6x - 14.$$

Γ4. Αφού η f παρουσιάζει τοπικό μέγιστο στο $x = 2$ τότε:

$f(x) \leq f(2)$ για κάθε $x \geq 2$ γνησίως φθίνουσα

$$-2x^3 + 6x^2 - 12 \leq -4$$

$$-2x^3 + 6x^2 - 12 + 4 \leq 0$$

$$-2x^3 + 6x^2 - 8 \leq 0$$

Διαιρώντας με -2 έχουμε:

$$x^3 - 3x^2 + 4 \geq 0$$

ΘΕΜΑ Δ

Δ1. Η f παραγωγίσιμη ως πολυωνυμική, οπότε $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = f'(1)$,

$$\text{άρα } \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(1+h)-f(1)}{h} = 0 \Leftrightarrow f'(1) = 0$$

$$\text{και } f'(x) = x^2 + 2\lambda x + 7$$

$$\text{συνεπώς } f'(1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2\lambda + 7 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda = -8 \Leftrightarrow \lambda = -4$$

Δ2. Για $\lambda = -4$ είναι $f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 4x^2 + 7x + \frac{2}{3} \Rightarrow f'(x) = x^2 - 8x + 7$ και $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ ή $x = 7$

Για $x \in (-\infty, 1) \cup (7, +\infty)$ είναι $f'(x) > 0$ και f συνεχής άρα f γνησίως αύξουσα στα διαστήματα $(-\infty, 1]$ και $[7, +\infty)$

Για $x \in (1, 7)$ είναι $f'(x) < 0$ και f συνεχής άρα γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$

Δ3. Είναι $2020 < 2025$ και f γνησίως αύξουσα στο $[7, +\infty)$ άρα $f(2020) < f(2025)$ και $f(2025) - f(2020) > 0$

Επιπλέον $\frac{3}{2} < \frac{5}{2}$ και f γνησίως φθίνουσα στο $[1, 7]$ άρα $f\left(\frac{3}{2}\right) > f\left(\frac{5}{2}\right)$ και $f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right) > 0$

$$\text{Τελικά } A = \frac{f(2025) - f(2020)}{f\left(\frac{3}{2}\right) - f\left(\frac{5}{2}\right)} > 0$$

$$\Delta 4. \text{ Είναι } \lim_{x \rightarrow 2} \frac{f'(x) - f''(x) + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 8x + 7 - 2x + 8 + 1}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 10x + 16}{\sqrt{x+1} - \sqrt{3}} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{(x-2)(x-8)(\sqrt{x+1} + \sqrt{3})}{x-2} = -12\sqrt{3}$$

Επιμέλεια:

Οικονόμου Ελένη, Πανάγου Γιώργος, Φουρτούνη Μαρία-Ανδριάννα, Καραμπετάκη Δομνίκη, Παπανικολάου Παναγιώτης, Βασιλειάδου Σοφία, Λουλακάς Γιώργος, Ντούκας Σταύρος

και τα κέντρα ΔΙΑΚΡΟΤΗΜΑ: Πειραιάς, Κερατσίνι, Καβάλα, Πέραμα, Νίκαια, Περιστέρι Νέα Ζωή, Παγκράτι Κέντρο, Νέος Κόσμος, Λευκάδα